C E N T R U L
NAȚIONAL DE
EVALUARE ŞI
EXAMINARE

MINISTERUL
EDUCAȚIEI
CERCETĂRII
TINERETULUI
ŞI SPORTULUI

Evaluarea la disciplina *Matematică*
în cadrul examenului național de bacalaureat 2011
Programa M1

Introducere

Examenul național de bacalaureat este modalitatea esențială de evaluare externă sumativă a competențelor, a nivelului de cultură generală şi de specializare atins de absolvenții de liceu.

Conform **Metodologiei de organizare şi desfăşurare a examenului de bacalaureat – 2011**, aprobată prin ordinul MECTS nr. 4799/31.08.2010, elevii susțin, în cadrul probei E. c), în conformitate cu filiera, profilul şi specializarea urmate, proba de matematică, corespunzătoare programelor M1, M2 sau M4.

În consecință, susțin proba scrisă la disciplina *Matematică* elevii care au absolvit liceul în cadrul profilului real din filiera teoretică, în cadrul tuturor profilurilor din filiera tehnologică şi în cadrul profilului pedagogic, specializarea învățător-educatoare şi a profilului militar, specializarea matematică-informatică, din filiera vocațională. *Matematica* are statut de disciplină obligatorie pentru aceştia.

Structura probei scrise la disciplina Matematică

Testele elaborate pentru proba scrisă la matematică contribuie la îndeplinirea funcțiilor evaluării urmărite prin examenul de bacalaureat. Prin aceste teste se realizează o evaluare sumativă la finalul învățământului preuniversitar. Fiecare test asigură o cuprindere echilibrată a materiei studiate, are un grad de complexitate corespunzător cu programa de bacalaureat al cărei conținut este inclus în programa şcolară şi poate fi rezolvat în timpul stabilit de 3 ore.

Testul pentru proba scrisă la disciplina *Matematică* este format din trei subiecte. Fiecare subiect conține fie itemi subiectivi de tip rezolvare de probleme, fie itemi semiobiectivi de tip întrebări structurate.

Competenţe de evaluat la disciplina Matematică

Proba scrisă la disciplina *Matematică*, susținută în cadrul examenului de bacalaureat, evaluează competențe dezvoltate pe parcursul învățământului liceal, în conformitate cu programele şcolare pentru clasele a IX-a - a XII-a, în vigoare pentru absolvenții promoției 2011.

Competențele de evaluat, asociate conținuturilor programei de bacalaureat, în cadrul probei scrise la matematică, sunt:

1. ***Identificarea unor date şi relații matematice şi corelarea lor în funcție de contextul în care au fost definite***
   - Utilizarea proprietăților algebrice ale numerelor, a estimărilor şi aproximărilor în contexte variate
   - Recunoaşterea unor corespondențe care sunt şiruri, progresii, funcții
   - Identificarea valorilor unei funcții folosind reprezentarea grafică
   - Descrierea sintetică sau vectorială a proprietăților unor configurații geometrice
   - Identificarea unor metode posibile în rezolvarea problemelor
   - Interpretarea primară a datelor statistice sau probabilistice cu ajutorul calculului financiar, a graficelor şi a diagramelor
2. ***Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural, contextual cuprinse în enunțuri matematice***
   - Utilizarea unor metode algebrice şi/ sau grafice pentru rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor de ecuații
   - Completarea unor tabele de valori necesare pentru trasarea graficului
   - Aplicarea unor metode diverse pentru optimizarea calculelor de distanțe, unghiuri şi arii
   - Identificarea tipului de formulă de numărare adecvată unei situații problemă date
   - Utilizarea unor algoritmi specifici calculului financiar, statisticii sau probabilităților pentru analiza de caz
   - Identificarea unor metode de calcul a integralelor, prin realizarea de legături cu regulile de derivare
   - Interpretarea unor proprietăți ale şirurilor şi ale altor funcții cu ajutorul reprezentărilor grafice
   - Evidențierea asemănărilor şi a deosebirilor dintre proprietățile unor operații definite pe mulțimi diferite şi dintre calculul polinomial şi cel cu numere

3. ***Utilizarea algoritmilor şi a conceptelor matematice pentru caracterizarea locală sau globală a unei situaţii concrete***
   - Alegerea formei de reprezentare a unui număr real şi utilizarea de algoritmi pentru optimizarea calculului cu numere
   - Transpunerea în limbaj matematic prin mijloace statistice sau probabilistice a unor probleme practice
   - Operarea cu funcţii reprezentate în diferite moduri şi caracterizarea calitativă a acestor reprezentări
   - Utilizarea unor formule combinatoriale în raţionamente de tip inductiv
   - Utilizarea operaţiilor cu vectori pentru a descrie o problemă practică
   - Aplicarea algoritmilor de calcul în situaţii practice
4. ***Exprimarea caracteristicilor matematice cantitative sau calitative ale unei situaţii concrete şi a algoritmilor de prelucrare a acestora***
   - Caracterizarea unor mulţimi de numere şi a unor relaţii dintre acestea utilizând limbajul logicii matematice şi teoria mulţimilor
   - Exprimarea proprietăţilor unei funcţii prin condiţii algebrice sau geometrice
   - Exprimarea prin reprezentări grafice a unor condiţii algebrice; exprimarea prin condiţii algebrice a unor reprezentări grafice
   - Exprimarea analitică, sintetică sau vectorială a caracteristicilor matematice ale unei configuraţii geometrice
   - Exprimarea cu ajutorul noţiunilor de limită, continuitate, derivabilitate, monotonie, a unor proprietăţi cantitative şi calitative ale unei funcţii
   - Analizarea unor configuraţii geometrice pentru optimizarea algoritmilor de rezolvare
   - Analizarea şi interpretarea unor situaţii practice cu ajutorul conceptelor statistice sau probabilistice
   - Utilizarea proprietăţilor operaţiilor în calcule specifice unei structuri algebrice
5. ***Analiza şi interpretarea caracteristicilor matematice ale unei situaţii-problemă***
   - Analizarea unor contexte uzuale şi matematice (de exemplu: redactarea soluţiei unei probleme) utilizând limbajul logicii matematice şi teoria mulţimilor
   - Analizarea unor situaţii practice şi descrierea lor cu ajutorul funcţiilor
   - Interpretarea unor situaţii-problemă cu conţinut practic cu ajutorul funcţiilor şi a elementelor de combinatorică
   - Stabilirea unor condiţii de existenţă şi/ sau de compatibilitate a unor sisteme şi identificarea unor metode adecvate de rezolvare a acestora

- Folosirea proprietăților unei funcții continue pentru calcularea integralei acesteia pe un interval

6. ***Modelarea matematică a unor contexte problematice variate, prin integrarea cunoştinţelor din diferite domenii***
   - Transpunerea unei situații-problemă în limbaj matematic, rezolvarea problemei şi interpretarea rezultatului
   - Interpretarea informațiilor conținute în reprezentări grafice prin utilizarea de estimări, aproximări şi strategii de optimizare
   - Optimizarea calculului trigonometric prin alegerea adecvată a formulelor
   - Modelarea unor configurații geometrice analitic, sintetic sau vectorial
   - Optimizarea rezolvării unor probleme sau situații-problemă prin alegerea unor strategii şi metode adecvate (de tip algebric, vectorial, analitic, sintetic)
   - Explorarea unor proprietăți cu caracter local şi/ sau global ale unor funcții utilizând continuitatea, derivabilitatea sau reprezentarea grafică

Precizări privind evaluarea probei scrise la disciplina Matematică

Ponderea diferitelor comportamente cognitive în evaluarea competenţelor elevilor prin proba scrisă la examenul de bacalaureat 2011, disciplina *Matematică*, este ilustrată în tabelul de mai jos:

Competenţă / **Tip de comportament**	**Cunoştinţe, abilităţi/ deprinderi, atitudini**				
Comportamente cognitive	**Cunoaştere**	**Înţelegere**	**Aplicare**	**Analiză – Sinteză**	**Evaluare**
Pondere	**10%**	**15%**	**50%**	**15%**	**10%**

Competenţele de evaluat, înscrise în programele pentru examenul de bacalaureat 2011 la *Matematică* sunt urmărite, în cadrul probei scrise, având în vedere raportul dintre competenţă şi comportamentele cognitive corespunzătore, conform prezentării anterioare.

Baremul de evaluare şi de notare este asociat sarcinilor concrete de lucru date elevilor şi pe baza acestuia se apreciază lucrările scrise. Baremul de evaluare şi de notare este elaborat cu un grad înalt de obiectivitate şi aplicabilitate, astfel încât să reducă diferenţele de notare dintre evaluatori. Baremul de evaluare şi de notare a fost proiectat pe baza notării analitice. Aceasta implică determinarea principalelor performanţe (unităţi de răspuns) pe care elevul trebuie să le evidenţieze în rezolvarea fiecărui item. Notarea analitică are avantajul de a asigura rigurozitatea corectării, favorizând realizarea unei aprecieri obiective.

Baremul de evaluare şi de notare, în cazul itemilor de tip rezolvare de probleme/ întrebări structurate, include elemente ale răspunsului care sunt notate. În acest fel candidatul primeşte punctaj pentru rezolvări parţiale ale cerinţei itemului. Pentru o evaluare unitară, în barem se regăsesc rezolvări complete ale itemilor. Se punctează corespunzător oricare altă metodă de rezolvare corectă a problemei.

Testul şi baremul corespunzător, elaborate în vederea asigurării transparenţei şi informării persoanelor interesate, sunt prezentate ca modele pentru examenul de bacalaureat 2011.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ MODEL

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.
- **Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați modulul numărului complex $z = 1 - i\sqrt{3}$.

5p **2.** Determinați mulțimea valorilor funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x + 1$.

5p **3.** Știind că doi termeni ai unei progresii geometrice sunt $b_3 = 6$ şi $b_5 = 24$, determinați termenul b_7.

5p **4.** Determinați $x > 0$, știind că $\log_a x = 2\log_a 3 - 3\log_a 2$, unde $a > 0,\ a \neq 1$.

5p **5.** Scrieți ecuația dreptei care conține punctul $A(3, 2)$ şi este perpendiculară pe dreapta $d : x + 2y + 5 = 0$.

5p **6.** Știind că $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ şi $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, calculați $\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -2x & 4x^2 \\ 0 & 1 & -4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ din mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Calculați $\left(A(2) - A(0)\right)^{2010}$.

5p **b)** Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Demonstrați că matricea $A(x)$ este inversabilă şi calculați inversa matricei $A(x)$.

2. Pe mulțimea $G = (0,1)$ se defineşte legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$.

5p **a)** Verificați dacă $e = \frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii „$*$”.

5p **b)** Arătați că orice element din mulțimea G este simetrizabil în raport cu legea „$*$”.

5p **c)** Demonstrați că funcția $f : G \to \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{1}{x} - 1$ este un izomorfism de la grupul $(G, *)$ la grupul $\left(\mathbb{R}_+^*, \cdot\right)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x-2)(x-3)(x-4)(x-5) + 1$.

5p **a)** Calculați $f'(5)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{f(n+1) - 1}{f(n) - 1} \right)^n$.

5p **c)** Arătați că ecuația $f'(x) = 0$ are exact trei soluții reale distincte.

2. Fie şirul $(I_n)_{n \geq 0}$, $I_n = \int_0^1 \frac{\left(x^2 + x + 1\right)^n - x}{x^2 + 1} dx$.

5p **a)** Calculați I_0.

5p **b)** Verificați dacă $I_2 - I_0 \in \mathbb{Q}$.

5p **c)** Arătați că $I_{4n+1} \in \mathbb{Q}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ **MODEL**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left\|1-i\sqrt{3}\right\|=\sqrt{1+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=$ $=\sqrt{4}=2$	**3p** **2p**
2.	$x^2+x+1-y=0$ $\Delta=4y-3\geq 0$ $\mathrm{Im}_f=\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$	**1p** **2p** **2p**
3.	$b_1=\frac{3}{2}$ $q^2=4$ $b_7=96$	**1p** **2p** **2p**
4.	$\log_a x=\log_a 9-\log_a 8$ $\log_a x=\log_a\frac{9}{8}\Rightarrow x=\frac{9}{8}$	**2p** **3p**
5.	$m_d=-\frac{1}{2}\Rightarrow m_{d'}=2$ unde $d\perp d'$ Ecuația dreptei d' este $y=2x-4$	**2p** **3p**
6.	$\cos^2 x=1-\sin^2 x=\frac{1}{9}$ $\cos x=\pm\frac{1}{3}$ $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\Rightarrow\cos x=-\frac{1}{3}$	**2p** **1p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)-A(0)=\begin{pmatrix}0&-4&16\\0&0&-8\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\left(A(2)-A(0)\right)^3=O_3$ $\left(A(2)-A(0)\right)^{2010}=O_3$	**2p** **2p** **1p**

b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1 & -2x-2y & 4y^2+8xy+4x^2\\ 0 & 1 & -4x-4y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	**3p**
	Finalizare	**2p**
c)	$\det(A(x))=1\neq 0$, deci matricea este inversabilă	**1p**
	$A(x)A(-x)=A(0)=I_3$	**2p**
	$A^{-1}(x)=A(-x)=\begin{pmatrix}1 & 2x & 4x^2\\ 0 & 1 & 4x\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$x*\frac{1}{2}=\frac{1}{2}*x=x, \forall x\in G$	**1p**
	Verificare	**3p**
	Legea "$*$" are element neutru $e=\frac{1}{2}$	**1p**
b)	Orice element din G este simetrizabil şi $x'=1-x$	**3p**
	$0<x'<1$, deci $x'\in G$	**2p**
c)	Justificarea faptului că funcția f este bijectivă	**2p**
	$f(x*y)=\frac{1}{x*y}-1=\frac{(x-1)(y-1)}{xy}$	**2p**
	$f(x)f(y)=\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)=\frac{(x-1)(y-1)}{xy}=f(x*y)$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to 5}(x-2)(x-3)(x-4)=$	**2p**
	$=6$	**1p**
b)	$\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1}=\frac{n-1}{n-5}$	**1p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n-5}\right)^n=$	**1p**
	$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{4}{n-5}\right)^n=$	**1p**
	$=e^4$	**2p**
c)	$f(2)=1,\ f(3)=1,\ f(4)=1,\ f(5)=1$	**1p**
	f continuă pe intervalele $[2,3],[3,4],[4,5]$	**1p**
	f derivabilă pe intervalele $(2,3),(3,4),(4,5)$	**1p**
	Din teorema lui Rolle şi din faptul că f' este de gradul trei rezultă că $f'(x)=0$ are exact trei soluții reale distincte	**2p**
2.a)	$I_0=\int_0^1\frac{1-x}{x^2+1}dx=$	**1p**

	$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = arctgx\Big\vert_0^1 = \frac{\pi}{4}$	**1p**
	$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big\vert_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$	**2p**
	$I_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$	**1p**
b)	$I_2 - I_0 = \int_0^1 \frac{\left(x^2+x+1\right)^2 - 1}{x^2+1}dx =$	**1p**
	$= \int_0^1 \left(x^2+2x+2\right)dx - \int_0^1 \frac{2}{x^2+1}dx =$	**1p**
	$= \frac{10}{3} - 2\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} =$	**1p**
	$= \frac{10}{3} - \frac{\pi}{2} \notin \mathbb{Q}$	**2p**
c)	X^2+1 divide $\left(X^2+X+1\right)^{4n+1} - X$	**2p**
	$\frac{\left(x^2+x+1\right)^{4n+1} - x}{x^2+1} = g(x)$, unde $g \in \mathbb{Z}[X]$	**1p**
	$\int_0^1 g(x)dx \in \mathbb{Q}$	**2p**